2 heures

$\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On munit l'espace vectoriel $\mathfrak{R}^n (n \geq 2)$ de sa structure euclidienne canonique, c'est à dire du produit scalaire suivant :

$$si\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (X|Y) = {}^tX.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i$$

On note $B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathfrak{R}^n$, on sait qu'elle est orthonormale pour le produit scalaire précédent.

Dans la première partie on donnera 2 exemples de matrices symétriques à coefficients positifs et on étudiera certaines de leurs propriétés ; la seconde partie traite plus généralement du cas des matrices symétriques à coefficients positifs.

I

A) On note f l'endomorphisme de $\mathfrak{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ c'est à dire : } f : \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^3$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M.X$$

1 - Existe-t-il une base orthonormale de $\mathfrak{R}^3$ où la matrice de f est diagonale ? Quelle est cette matrice diagonale ?
(on ne déterminera pas la base orthonormale)

2 - On classe les valeurs propres de $f : \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, on note $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ une base orthonormale de vecteurs propres pour f, associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (on ne déterminera pas ces vecteurs).

Pour tout vecteur X de $\mathfrak{R}^3$, $X = \sum_{i=1}^{3} x'_i\ e'_i$, évaluer en fonction de x'_1, x'_2, x'_3 le produit scalaire $(f(X)|X)$.

Montrer que pour tout vecteur X unitaire de $\mathfrak{R}^3$ $(\|X\| = 1)$, on a $\lambda_1 \leq (f(X)|X) \leq \lambda_3$

B) On note f l'endomorphisme de $\mathfrak{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \left(\min(i,j)\right)_{1\le i,j\le n}$$

1 - Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T, dont les coefficients sont des "1" ou des "0", telle que : $M = {}^tT.T$.

2 - Calculer le déterminant de M.

3 - Montrer que : $\forall\ X \in \mathfrak{R}^n \quad \left(f(X)|X\right) \ge 0$.

4 - En déduire que les valeurs propres de f (ou de M) sont des réels strictement positifs.

N.B : min (i,j) = le plus petit des entiers i et j.

II Soit f un endomophisme de $\mathfrak{R}^n$, qui est non nul et symétrique (auto-adjoint), c'est-à-dire $\forall (X,Y) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \quad \left(f(X)|Y\right) = \left(X|f(Y)\right)$.

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathfrak{R}^n$ et $M = \left(m_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$. On sait que le polynôme caractéristique de f (ou de M) a toutes ses racines réelles et on les note :

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \ldots \le \lambda_n$$

A) 1 - Montrer que M est une matrice symétrique $\left(m_{ij} = m_{ji}\right)$.

2 - Soit X un vecteur de $\mathfrak{R}^n$ de norme 1, montrer

a) $\lambda_1 \le \left(f(X)|X\right) \le \lambda_n$.

b) $\left(f(X)|X\right) = \lambda_1 \Leftrightarrow f(X) = \lambda_1 X$.

c) $\left(f(X)|X\right) = \lambda_n \Leftrightarrow f(X) = \lambda_n X$.

(on rapportera $\mathfrak{R}^n$ à une base orthonormale bien choisie)

B) On suppose dorénavant que la matrice M a tous ses coefficients strictement positifs $(m_{ij}>0)$.

1 - Soit U un vecteur unitaire $(\|U\|=1)$ qui est vecteur propre de f pour la valeur propre λ_n, on note

$$U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}u_i\,e_i \quad \text{et} \quad U'=\begin{pmatrix}|u_1|\\|u_2|\\\vdots\\|u_n|\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}|u_i|\,e_i$$

a) Donner l'expression de $(f(U)|U)$ en fonction des coefficients m_{ij} de M et des composantes u_i de U, en déduire que $(f(U)|U)\le(f(U')|U')$, puis $f(U')=\lambda_n U'$.

b) En comparant les expressions $(f(U')|U')$ et $(f(U)|U)$ montrer que les composantes $u_1,u_2\ldots u_n$ de U sont toutes de même signe $\left(\forall i\in\{1..n\}\quad u_i\ge 0 \;\; ou \;\; \forall i\in\{1..n\}\quad u_i\le 0\right)$.

En déduire que la dimension du sous espace propre associé à λ_n est égale à 1. (on pourra éventuellement raisonner par l'absurde en supposant que sa dimension est supérieure ou égale à 2, et en exploitant 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de $E_{\lambda_n}=\ker\left(f-\lambda_n I_E\right)$).

2 - Soit λ_i une valeur propre de f différente de λ_n et Y un vecteur propre associé à cette valeur propre λ_i et de norme 1, on note

$$Y=\sum_{i=1}^{n}y_i\,e_i \quad \text{et} \quad Y'=\sum_{i=1}^{n}|y_i|\,e_i$$

a) Montrer que : $|(f(Y)|Y)|\le(f(Y')|Y')$

$$|\lambda_i|\le\lambda_n$$

b) Calculer $(f(U')|Y)$, en déduire que les composantes $y_1,y_2\ldots y_n$ de Y ne sont pas toutes de même signe et qu'on a

$$|(f(Y)|Y)|<(f(Y')|Y')$$

$$|\lambda_i|<\lambda_n$$